Geometria iperbolica 13-05

M spazio simmetrico

M determina (G, K, σ)

gr. di Lie — $K \subset G$ cpt, gruppo di isotropia — automorfismo involutivo t.c. K è aperto in $C_G(\sigma)$

Viceversa, dati (G, K, σ) come sopra, è univocamente determinato uno spazio simmetrico M.

1) Identifichiamo M a $G/K = \{ gK \mid g \in G \}$

2) Muniamo M di una metrica Riemanniana t.c. G e σ agiscono tramite isometrie.

3) Definiamo $s : M \to M$ come $s(hK) = \sigma(h) \cdot K$ è un'inversione nel punto p di M corrispondente a K.

2) Misura di Haar: G gruppo di Lie, $\dim(G) = n$.

Fissiamo ω n forma non banale su $T_e G$

Trasportiamo ω su $T_g G$ tramite molt. a sx, otteniamo una n-forma

ω_g su $T_g G \rightsquigarrow$ forma volume su G.

A partire dalla misura di Haar si costruisce in modo canonico una metrica Riemanniana G-invariante su G/K.

Esempi: $\mathbb{H}^n \longleftrightarrow \left(SO^\circ(n,1), SO(n), \sigma = \text{coniugio per } \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \right)$

$\mathbb{R}^n \longleftrightarrow \left(SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n, SO(n), \sigma : (M, v) \to (M, -v) \right)$

$\mathbb{S}^n \leftrightarrow (SO(n+1),\ K = \mathrm{Stab}(e_{n+1}) = SO(n),\ \sigma = \text{coniugio per } \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & +1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{H}^2 \leftrightarrow \mathbb{P}SL_2(\mathbb{R}) \overset{\text{isogeno}}{\cong} SO(2,1)$

$\mathbb{H}^3 \leftrightarrow SL_2(\mathbb{C}) \xrightarrow[\varphi]{\text{embedda}} SL_{2n}(\mathbb{R})$

$\varphi(SL_2(\mathbb{C})) \underset{\text{isogeno}}{\cong} SO(3,1)$

- $SO(m,n)$ ...

- $G = SL(n, \mathbb{R})$, $K = SO(n, \mathbb{R})$, $\sigma(g) = (g^{-1})^T$

$\sigma^2 = 1$. $C_G(\sigma) = K \Rightarrow G/K$ sp. simmetrico.

Def: G gruppo di Lie. Un sottogruppo $\Gamma < G$ è un <u>reticolo</u> se

1) Γ è discreto in G

2) G/Γ ha volume finito rispetto alla misura di Haar.

Oss: Se M è uno spazio simmetrico con gr. di isometrie G, allora $\Gamma < G$ è un reticolo $\Leftrightarrow$ Γ agisce in modo propr. discontinuo su M e

M/Γ ha volume finito (rispetto alla metrica Riemanniana su M).

Problema: costruire reticoli in $SO(n,1)$ $\forall n > 0$.

Def: Sia $G < SL(n,\mathbb{R})$ gruppo di Lie. G è <u>definito su $\mathbb{Q}$</u> se

$\exists$ un insieme finito di polinomi $Q \subset \mathbb{Q}[\underbrace{x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{n,n}}_{n^2 \text{ variabili}}]$ t.c.

$$G^\circ = Var(Q)^\circ = \{ g \in SL(n,\mathbb{R}) \mid q(g) = 0 \ \forall q \in Q \}$$

Prop: G è definito su $\mathbb{Q}$ $\Leftrightarrow$ $G_{\mathbb{Q}} = \{ M \in G \mid M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{Q}) \}$ è denso in G.

Esempi: $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(m,n)$ - gr. ortogonale per
$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{m} & 0 \\ 0 & \underbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}_{n} \end{pmatrix}$$

$SO(f)$ f forma quadratica non degenere

rappresentata da una matrice a coeff. razionali.

$$SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n = \left(\begin{array}{c|c} SO(n) & \begin{matrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots\cdots 0 & 1 \end{array}\right)$$

Teo: (Borel - Harish Chandra)

$G < SL(n, \mathbb{R})$ gruppo di Lie semisemplice e definito su $\mathbb{Q}$.

$G_{\mathbb{Z}} = \{ M \in G \mid M \in M_{n \times n}(\mathbb{Z}) \}$ è un reticolo in G.

Corollario: $\forall n$ esistono varietà iperboliche n-dimensionali

- $G = SO(n,1)$ - definito su $\mathbb{Q}$, $\Gamma < SO(n,1,\mathbb{Z})$ è un reticolo
- $PSL(2,\mathbb{Z})$ è un reticolo in $\mathbb{H}^2$
- $PSL(2,\mathbb{Z}[i])$ è un reticolo in $\mathbb{H}^3$.

Chiamiamo i reticoli forniti da teo di Borel-Harish Chandra reticoli aritmetici.

- Estendiamo la def. in modo che sia invariante per le seguenti "manipolazioni":

1) Se $\phi : G_1 \to G_2$ è un isomorfismo e $\Gamma_1 < G_1$ è aritmetico, allora $\phi(\Gamma_1) = \Gamma_2 < G_2$ deve essere aritmetico in G_2.

2) Se $\Gamma_1 < G$ è aritmetico e $\Gamma_2 < G$ è commensurabile a Γ_1, Γ_2 deve essere aritmetico.

3) Ignorare sottogruppi compatti: Se $\underset{\text{compatto normale}}{K \triangleleft G}$, e Γ è un reticolo in G.

allora se Γ è aritmetico vogliamo che

$\dfrac{\Gamma K}{K}$ sia aritmetico in $\dfrac{G}{K}$:

Def: di reticolo aritmetico: G gruppo di Lie semisemplice. $\Gamma < G$ è <u>aritmetico</u> se esistono:

1) Un gruppo di Lie connesso e semisemplice $G' < SL(n,\mathbb{R})$ tale che G' è definito su $\mathbb{Q}$.

2) Sottogruppi compatti normali $K \triangleleft G^{\circ}$ e $K' \triangleleft G'$

3) Un isomorfismo $\phi : \frac{G^0}{K} \to \frac{G'}{K'}$ tale

$\phi(\overline{\Gamma})$ è commensurabile con $\overline{G'_{\mathbb{Z}}}$, dove $\overline{\Gamma}$ e $\overline{G'_{\mathbb{Z}}}$ sono le immagini

di $\Gamma \cap G^0$ e $G'_{\mathbb{Z}}$ in G^0/K e G'/K' rispettivamente

- Altri esempi di reticoli in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$

f forma quadratica di segnatura $(n,1)$ a coeff. in $\mathbb{Q}$ (matrice associata Q)

$\exists\, M \in GL(n+1, \mathbb{R})$ t.c. $M^T Q M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ e

$M\, O(f, \mathbb{R})\, M^{-1} = O(n,1)$

$O(f, \mathbb{Z})$ è un reticolo aritmetico e $M\, O(f, \mathbb{Z})\, M^{-1}$ è un reticolo aritmetico in $O(n,1)$

Def: $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ varietà iperbolica completa di vol. finito. M è una varietà aritmetica se Γ è un reticolo aritmetico in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$.

reticolo senza torsione

Ulteriori esempio: $\overset{A}{\curlyvee}\, K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,

$\mathcal{O}_k$ = anello degli interi di K $\qquad \mathcal{O}_k = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

$\mathcal{O}_K = \{k \in K \mid \exists\, p(x)$ polinomio monico a coeff. in $\mathbb{Z}$ t.c. $p(k) = 0\}$

f forma quadratica con matrice associata $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma(f) = (n, 1)$

$f = -\sqrt{2}x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Prop: $\underline{SO(f, \mathcal{O}_k)}$ è un reticolo aritmetico in $\underbrace{SO(f, \mathbb{R})}_{\hookrightarrow \text{ def. su } \mathbb{Q}[\sqrt{2}]}$.

Restrizione degli scalari:

Funtore che, data un'estensione finita di campi L/k di grado d e una varietà algebrica X definita su L, produce una varietà $\mathrm{Res}_{L/k} X$, definita su k e una corrispondenza naturale tra gli L-punti di X e i k-punti di $\mathrm{Res}_{L/k} X$. Se $\dim X = n$, allora $\dim(\mathrm{Res}_{L/k} X) = d \cdot n$

Esempio "facile": Ogni gruppo di Lie complesso (un chiuso in $GL(n,\mathbb{C})$) può essere pensato come un gruppo di Lie reale di dimensione doppia

$z \in \mathbb{C}$, $z = a+ib$, rappresentiamo z come $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Rappresentazione di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-algebra di dim. 2.

$$M \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \rightsquigarrow M' \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$$

ESEMPIO A $\quad f = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = Q, \quad G = SO(f, \mathbb{R})$

• $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ $\quad \mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ $\quad \sigma$ = automorfismo di Galois non banale di K

$$\sigma(1) = 1 \qquad \sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

- Definiamo $\Delta : K \longrightarrow \mathbb{R}^2$ come $\Delta(x) = (x, \sigma(x))$

$\Delta(\mathcal{O})$ è discreto in $\mathbb{R}^2$.

$\Delta(1) = (1, 1)$

$\Delta(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$] base di $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

$$\mathcal{O} = \frac{\mathbb{Z}[x]}{x^2-2} \xrightarrow[\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}]{} K = \frac{\mathbb{Q}[x]}{x^2-2} \xrightarrow[\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}]{} \frac{\mathbb{R}[x]}{x^2-2} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

omomorfismi di anelli

$$[p(x)] \longrightarrow (p(\sqrt{2}), p(-\sqrt{2}))$$

Fissando la base $\{1, \sqrt{2}\}$

$$\boxed{\mathcal{O} = \mathbb{Z}^2 < K = \mathbb{Q}^2 < K \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^2}$$

Interpretiamo tutto a livello di matrici

$$1 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad a+\sqrt{2}b \to \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$(K \otimes \mathbb{R}, K, \mathcal{O}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in (\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes \mathbb{R}}}{(a+\sqrt{2}b, a-\sqrt{2}b)}$$ isomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre

La sequenza di omomorfismi di anelli $\mathcal{O} \subset K \subset K \otimes \mathbb{R}$

induce una sequenza di omomorfismi di gruppi

$$f^{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$SO(f, \mathcal{O}) \xrightarrow{i} SO(f, K) \xrightarrow{\varphi} \boxed{SO(f, \mathbb{R}) \times SO(f^{\sigma}, \mathbb{R})}.$$

$$M \longmapsto (M, M^{\sigma})$$

gruppo di Lie semisemplice G definito su $\mathbb{Q}$ e $\varphi(SO(f, \mathcal{O})) = G_{\mathbb{Z}}$

$SO(f, *)$ è un funtore dalla categoria degli anelli commutativi alla categoria dei gruppi